Solusi Persamaan

Schrödinger Nonlinier Untuk Mendiskripsikan Soliton Dari Perambatan Pulsa Optik Dalam Medium Dispersif Nonlinier

Munawar Kholil

JURUSAN FISISKA

UNIVERSITAS NEGERI MALANG

INTISARI

sebuah pulsa optik dapat bergerak di dalam sebuah medium dispersif nonlinier tanpa berubah bentuk, seolah-olah ia sedang bergerak di dalam sebuah medium nondipsersif linier. Hal ini terjadi ketika dispersi kecepatan kelompok diimbangi oleh efek modulasi fase diri. Gelombang stasioner seperti itu disebut gelombang soliter. Soliton optis adalah gelombang soliter khusus yang orthogonal, dalam arti bahwa ketika kedua gelombang berpapasan atau bersilangan satu sama lain di dalam medium profil intensitasnya tidak berubah (hanya pergeseran fase sebagian sebagai akibat interaksi), sehingga masing-masing gelombang meneruskan bergerak sebagai suatu kesatuan yang bebas (soliter). Persamaan diferensial yang mengatur gugus kompleks dari sebuah pulsa optik yang merambat dalam medium dispersif nonlinier yang luas adalah persamaan Schrödinger nonlinier.

Kata kunci : dispersif, nonlierr, soliton optik, Schrödinger nonlinier.

1. PENDAHULUAN

Soliton disebut gundukan energi berhingga, stabil, menempati ruang terbatas dan tidak menyebar. Ide fisika soliton bermula pada Agustus 1934 ketika John Scott Russel (1808-1882), fisikawan Skotlandia, mengamati fenomena gelombang air di kanal Edinburg-Glasgow. Russel menyebut fenomena ini sebagai "gelombang besar translasi". Gelombang air tersebut menjalar dengan bentuk tak berubah, dalam rentang waktu relatif lama sepanjang kanal. Dalam kata-kata alih bahasa bebas, Russel menggambarkannya sebagai berikut : *”Saya yakin akan lebih baik memperkenalkan fenomena ini dengan mendeskripsikan keadaan dari pengenalan pertama saya dengannya. Saya sedang mengamati gerak kapal yang ditarik dengan cepat sepanjang kanal sempit oleh sepasang kuda, ketika kapalnya tiba-tiba berhenti - tidak demikian halnya dengan massa air*

pada kanal yang telah digerakkannya; gelombang itu berakumulasi mengelilingi haluan kapal dalam keadaan golakan dahsyat, dan kemudian dengan tiba-tiba meninggalkan haluan kapal, menjalar ke depan dengan kecepatan besar, dalam bentuk gundukan air yang melanjutkan penjalarannya sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk atau pengurangan kecepatan. Saya mengikuti gelombang itu di punggung kuda, dan setelah menyusuli, gelombang itu terus menjalar pada laju sekitar delapan atau sembilan mil per jam, dengan tetap mempertahankan bentuk awalnya, panjangnya sekitar tiga puluh kaki dan tingginya sekitar satu kaki setengah. Tingginya secara berangsur menurun, dan setelah pengejaran satu atau dua mil saya kehilangannya pada belokan kanal”.

Russel juga melakukan beberapa percobaan laboratorium untuk mereproduksi gelombang soliter atau gelombang soliton ini, dalam suatu tangki gelombang, dengan cara menjatuhkan sebuah benda pada salah satu ujung tangki. Ia mendeduksi secara empirik, volume air di gelombang sama dengan volume air yang dipindahkan.

Berdasarkan penelitian Korteweg dan de Vries diketahui bahwa gelombang besar translasi adalah bentuk khusus gelombang air permukaan. Persamaan yang mendeskripsikan penjalaran gelombang satu arah pada permukaan kanal yang dangkal diturunkan oleh Korteweg dan de Vries pada tahun 1895, yang dikenal dengan persamaan KDV.

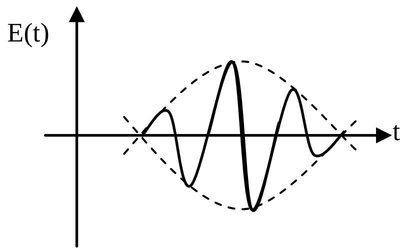
Stabilitas soliton berfungsi menyeimbangkan efek nonlinieritas dan dispersi, seperti yang ditunjukkan oleh soliton air dangkal pada persamaan KDV. Nonlinieritas memandu gelombang soliton untuk terlokalisasi, sedangkan dispersi menyebarkan gelombang terlokalisasi tersebut. Jika salah satu dari dua efek tersebut hilang, soliton menjadi tidak stabil dan secepatnya juga menghilang.

Permasalahan yang muncul adalah "*Bagaimana efek dari sifat médium dispersive nonlinier jika yang tinjau adalah pulsa optik sehingga terbentuk soliton?*".

2. PERSAMAAN DIFERENSIAL UNTUK FUNGSI GUGUS DALAM MEDIUM DISPERSIF NONLINIER

Indeks bias medium dispersif berubah sebagai fungsi frekuensi dari gelombang yang melewatinya dan dirumuskan dengan: $ck/\omega = n_o(\omega)$. Sedangkan angka gelombang dirumuskan dengan pesamaan: $k = n\omega/c$, dengan $n = n_0(\omega) + n_2|\mathbf{E}|^2$, n_2 adalah koefisien Kerr yang memberikan efek nonlier. Sehingga angka gelombang dalam medium dispersif non linier menjadi:

$$k = \frac{\left(n_0(\omega) + n_2|\mathbf{E}|^2\right)\omega}{c} \qquad (1)$$

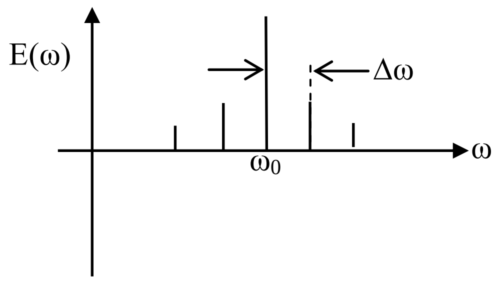


GAMBAR 1. (a) modulasi gelombang.

Meninjau medan listrik dari gelombang optik yang merambat searah z dengan frekuensi angular sentral ω_0 dan angka gelombang sentral k_0 Jika amplitudo maksimum dari gelombang cahaya secara lambat berubah terhadap waktu t dan ruang z, maka ekspresi medan listriknya dalam gugus kompleks dapat dirumuskan sebagai:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0(z,t)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\right\} \qquad (2)$$

Re adalah notasi bagian real sedangkan k_0 dan ω_0 brteturut-turut adalah angka gelombang dan frekuensi sudut sebagai pembawa gelombang. Fungsi gugus $\mathbf{E}_0$(z,t) menunjukkan fungsi yang bervariasi dengan lambat terhadap waktu dan jarak yang menginditifikasikan bahwa spektrum frekuensi dari medan listrik E strukurnya terlokalisasi dibawah frekuensi central ω_0, yang ditunjukan gambar 1. dan pada gambar 2, $\Delta\omega_0$ menunjukkan lebar spektrum frekuensi fungsi gugus E.



GAMBAR 2. (a) spektrum frekuensi.

Pada medium dispersif, dengan dispersif lemah konstanta angka gelombang dapat didekati dengan tiga suku pertama dari deret taylor. Yaitu:

$$k = k_0 + \frac{2\pi n_2}{\lambda}|\mathbf{E}|^2 + \frac{\partial k(\omega_0)}{\partial \omega}\frac{(\omega-\omega_0)}{(2-1)!} + \frac{\partial^2 k(\omega_0)}{\partial \omega^2}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(3-1)!}$$

(3)

Fungsi gugus kompleks **E**(z,t) dapat juga disajikan dalam bentuk **E**(Δk ,$\Delta\omega$) dengan menggunakan tranformasi Fourier. Dengan $\Delta\omega=\omega-\omega_0$ yang merepresentasikan pergeseran kecil frekuensi gugus dari frekuensi central dan $\Delta k=k-k_0$ yang merepresentasikan pergeseran angka gelombang.

$$\mathbf{E}(\Delta k, \Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z,t)e^{i(\Delta\omega t - \Delta k z)}dzdt$$

(4)

Dengan **E**(Δk, $\Delta\omega$) adalah inverse transformasi Fourier dari **E**(z,t):

$$\mathbf{E}(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\Delta k, \Delta\omega)e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)}d(\Delta k)d(\Delta\omega)$$

(5)

Dari persamaan (4) dan (5) dapat dilihat bahwa (∂/∂t)**E**(z,t)=-i $\Delta\omega$ dan (∂/∂z)**E**(z,t)=i Δk diperoleh ungkapan $\Delta\omega=i(\partial/\partial t)$ dan $\Delta k=-i(\partial/\partial z)$. Menuliskan kembali persamaan (3) dengan menganti nilai (ω- ω_0) dan (k-k_0) berturut-turut dengan $\Delta\omega$ dan Δk maka ekspresi persamaan (3) menjadi sebuah operator, yaitu:

$$-i\frac{\partial}{\partial z} = ik'\frac{\partial}{\partial t} - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g|\mathbf{E}|^2 \qquad (6)$$

dengan $g = 2\pi n_2/\lambda$. Kemudian operator tersebut diopeasikan pada fungsi gugus **E**(z,t), maka diperoleh:

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z} + k'\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}(z,t) - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z,t)}{\partial t^2} + g|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}(z,t) = 0 \qquad (7)$$

Dengan $k'=\partial k/\partial\omega\,|_{\omega o}$, $k''=\partial^2 k/\partial\omega^2\,|_{\omega o}$. Dan kecepatan kelompok v_g dari modulasi gelombang adalah $v_g = \partial\omega/\partial k = (k')^{-1}$ dan $k'' = -v_g^{-2}\,\partial vg/\partial\omega$. Ekspresi ini menunjukkan bahwa *k"* diberikan oleh frekuensi yang tergantung pada kecepatan gugus gelombang. Oleh karena itu *k"* merepresentasikan sifat dispersi kecepatan kelompok dari gelombang.

Jika $k''= 0$, solusi persamaan (7) dapat dinyatakan dalam fungsi yang berubah-ubah terhadap $z-t/k'=z-v_g t$, $E(z-v_g t)$. representasi ini menunjukkan bahwa perambatan gugus gelombang cahaya bergerak dengan kecepatan kelompok. Berdasarkan fakta ini, dapat digunakan sistem koordinat baru yang bergerak dengan kecepatan kelompok yaitu: $\xi = \varepsilon^2 z$ dan $\tau = \varepsilon(t - k'z)$. Sehingga dioperoleh:

(2.4)

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \tau^2} + g\frac{|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}}{\varepsilon^2} = 0 \qquad (8)$$

ε adalah kuantitas kecil $\Delta\omega_0/\omega_0$ yang menandakan lebar relatif dari spektrum.

Jika persamaan diatas dibandingkan dengan persamaan Schrödinger dalam satuan SI yang telah diketahui yaitu :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = 0$$

dan menggatikan V dengan $|\mathbf{E}|^2$, t dengan ξ dan x dengan τ. Hal ini menunjukkan bahwa potensial V dari persamaan Schrödinger di representasikan oleh $|\mathbf{E}|^2$, yang menjelaskan bahwa indeks bias bervariasi besarnya pada nilai E^2.

Persamaan (8) adalah persamaan Schrödinger nonlinier satu dimensi yang akan dicari solusinya.

3. FUNGSI SOLITON OPTIK SEBAGAI SOLUSI PERSAMAAN SCHRÖDINGER NONLINIER

Agar mudah mendapatkan solusinya persamaan (8) perlu dinormalisasi dengan memasukkan nilai-

nilai berikut:

$$q = \frac{\sqrt{g\lambda}}{\varepsilon}E \quad ; \quad \mathrm{T} = \frac{\tau}{(-\lambda k'')^{1/2}} \quad ; \quad \mathrm{Z} = \frac{\xi}{\lambda} \qquad (9)$$

Sehingga persamaan (8) menjadi:

$$i\frac{\partial q}{\partial \mathrm{Z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \mathrm{T}^2} + |q|^2 q = 0 \qquad (10)$$

Persamaan diatas dapat diselasaikan dengan menggunakan metode sparasi variable , yaitu:

$$q(\mathrm{T},\mathrm{Z}) = \sqrt{\rho(\mathrm{T},\mathrm{Z})}e^{i\sigma(\mathrm{T},\mathrm{Z})} \qquad (11)$$

Dan sarat batas yang harus dipenuhi untuk mendapatkan solusi yang stasioner selama perambatannya adalah:

a. $|q|^2$ dibatasi oleh dua nilai yaitu ρ_s dan ρ_D

b. Saat $|q|^2 = \rho_s$, $|q|^2$ adalah nilai extrim, yaitu pada saat$|q|^2 = \rho_s$, $\partial|q|^2/\partial\mathrm{T} = 0$ tetapi $\partial^2|q|^2/\partial\mathrm{T}^2 \neq 0$

c. ρ_D adalah nilai asimtot dari $|q|^2$ pada $\mathrm{T}\rightarrow\pm\infty$, artinya saat $|q|^2 = \rho_D$ $\partial^n|q|^2/\partial\mathrm{T}^n = 0$.

Kemudian mensubtitusikan persamaan (11) ke persamaan (10) sehingga diperoleh bagian riel dan imajiner berturut-turut adalah:

$$\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{Z}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\left(\rho\frac{\partial\sigma}{\partial \mathrm{T}}\right) = 0 \qquad (12)$$

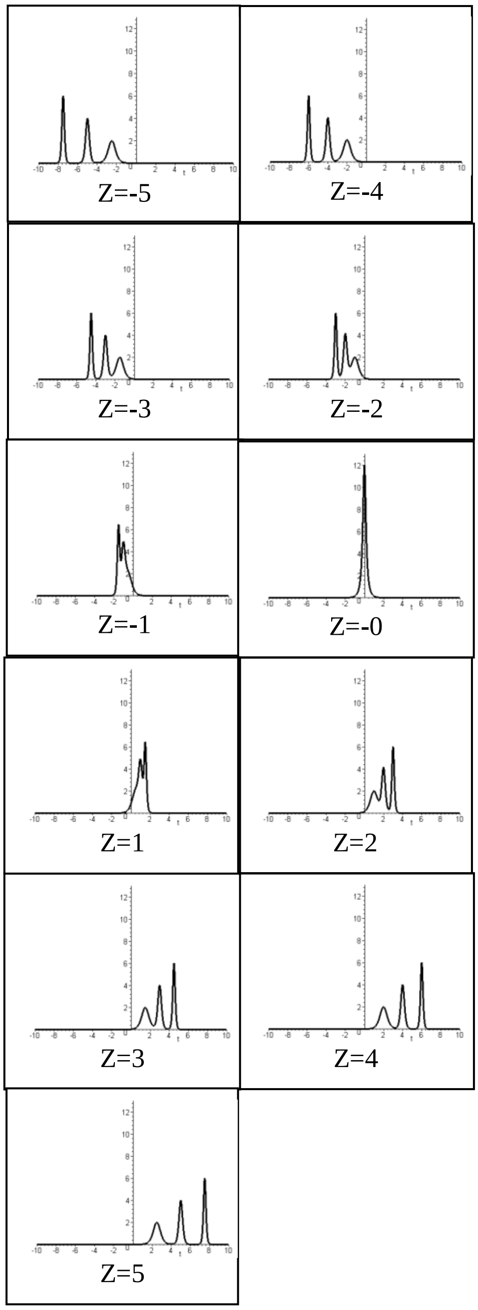
$$\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[4\rho^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{T}}\right)^2\right] = \frac{\partial\sigma}{\partial \mathrm{Z}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial \mathrm{T}}\right)^2 \qquad (13)$$

Dari persamaan (12) dan (13) yang dikondisikan dengan syarat batas diatas diperoleh solusi soliton yaitu:

$$\rho = \rho_o Sech^2\left(\sqrt{\rho_o}(\mathrm{T} + \kappa\mathrm{Z})\right) \qquad (14)$$

$$q(\mathrm{T},\mathrm{Z}) = \eta Sech(\eta(\mathrm{T} + \kappa\mathrm{Z}))Expi\left\{-\kappa\mathrm{T} + \frac{1}{2}(\eta^2 - \kappa^2)\mathrm{Z}\right\} \qquad (15)$$

Dimana $(\rho_0)^{1/2}$ diganti dengan η.



GAMBAR3: Plot 3 soliton pada nilai Z yang berdeda, tinggi soliton (amplitude) sebagai fungsi T

Solusi gelombang soliter (15) mempunyai dua parameter yaitu η yang merepresentasikan amplitudo dan lebar pulsa gelombang soliter, dan κ mrepresentasikan kecepatan transmisi pulsa. Dan solusi untuk N soliton adalah:

$$q(\mathrm{T},\mathrm{Z}) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j Sech \eta_j (\mathrm{T} \mp \kappa_j \mathrm{Z}) Exp\, i\left(\pm \kappa_j \mathrm{T} + \frac{1}{2}(\eta^2{}_j - \kappa^2{}_j)\mathrm{Z}\right) \tag{17}$$

$$|q(\mathrm{T},Z)|^2 = \sum_{j=1}^{N} \eta_j{}^2 Sech^2 \eta_j (\mathrm{T} \mp \kappa_j Z) \tag{18}$$

Gambar 3 memperlihatkan plot superposisi tiga soliton yang mempunyai amplitudo dan kecepatan berdeda. Tiga soliton tersebut di tempat terpisah satu sama lain, masing-masing soliton berpindah dengan bentuk dan kecepatan konstan, kemudian bergabung menjadi paket gelombang tunggal, lalu segera berpisah menjadi tiga gelombang soliton lagi.
Pada gambar 3 juga memperlihatkan bahwa soliton di Z=-5 simetris dengan soliton di Z=5, begitu seteusnya soliton di Z=-n simetris dengan soliton di Z=n. keadaan itu menunjukkan bahwa bentuk dan kecepatan transmisi soliton sama antara sebeleum terjadinya super posisi dan setelah terjadinya superposi. Keadaan ini menunjukkan sifat partikel.

4. KESIMPULAN

Dari penjelasan diatas dapat simpulkan bahwa:

a. Solulsi N soliton dari perambatan pulsa optik pada medium dispersif adalah:

$$q(\mathrm{T},\mathrm{Z}) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j Sech\, \eta_j (\mathrm{T} \mp \kappa_j \mathrm{Z}) Exp\, i\left(\pm \kappa_j \mathrm{T} + \frac{1}{2}(\eta^2{}_j - \kappa^2{}_j)\mathrm{Z}\right)$$

b. Surper posisi dari beberapa soliton memperlihatkan sifat partikel, yaitu ketika soliton ditempatkan terpisah satu sama lain, masing-masing soliton menjalar dengan bentuk dan kecepatan konstan. Sebagaimana dua atau lebih gelombang soliton semakin mendekat, mereka secara berangsur-angsur berubah bentuk, kemudian bergabung menjadi paket gelombang tunggal, lalu segera berpisah menjadi dua gelombang soliton dengan bentuk dan kecepatan yang sama dengan sebelum terjadinya super posisi. Oleh karena itu soliton juga disebut gelombang soliter.

5. REFERENSI

[1] Arfken, George. 1985. *Mathematical Method in Th Physical*. Miami. Academic press, INC.

[2] Boas, M.L.,1983. *Mathematical Method in Th Physical Sciences*. New York. John Wiley and Sons INC.

[3] Hasegawa, Akira. 1989. O*ptical Soliton in Fiber*. New York. Springer-Verlag.

[4] Hidayat, Arif. 2004. hand book *optika moderen.*.

[5] Guenther, Robert D. 1990. *Modern optik*. New York. John Wiley and Sons INC.

[6] Saleh, B. E. A. & Teich. M. C. 1991. *Fundamental of Fotonics*. New York. John. Wiley and Sons INC.